I) Exponentielle de matrices

Exercice 1: ⋆ *b.15.4, b.15.6*

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\exp(A) = aI_2 + bA$.
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(u - \mathrm{id})^2 = 0$. Calculer e^u.

Exercice 2: ⋆⋆ *b.15.11*

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie (P) si pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, il existe un sous-espace affine strict de $\mathbb{C}^n$ contenant $\left\{e^{tA}X, t \in \mathbb{R}\right\}$.

1. Montrer que si $\det A = 0$ alors A vérifie (P).
2. Quelles sont les matrices diagonalisables vérifiant (P) ?
3. Quelles sont les matrices vérifiant (P) ?

Exercice 3: ⋆⋆ *b.15.13*

On s'intéresse à l'ensemble des matrices toutes puissantes, *id est* aux matrices $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $M = A^n$.

1. Traiter le cas $p = 1$.
2. Montrer que toute matrice M dont le polynôme caractéristique est scindé peut s'écrire sous la forme $M = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$.
   On note $\mathcal{N}_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices nilpotentes et $\mathcal{U}_p^(\mathbb{K}) = \{I_p + N, N \in \mathcal{N}_p(\mathbb{K})\}$ l'ensemble des matrices unipotentes.
   De plus pour $U = I_p + N \in \mathcal{U}_p(\mathbb{K})$, on définit $\ln(U) = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k-1} \frac{N^k}{k}$.
3. Montrer que ln de $\mathcal{U}_p^(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{N}_p(\mathbb{K})$ est la bijection réciproque de exp de $\mathcal{N}_p(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{U}_p^(\mathbb{K})$.
4. Quelles sont les matrices unipotentes qui sont toutes puissantes ?
5. Quelles sont les matrices dont le polynôme caractéristique est scindé qui sont toutes puissantes ?

Exercice 4: ★★★ *b.14.17*

Soient $a_n \leqslant \cdots \leqslant a_1$ et $b_n \leqslant \cdots \leqslant b_2 \leqslant b_1$, et pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $T_\sigma = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$.

1. Trouver $\max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} T_\sigma$.
   Soient $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ et $B = \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)$. On cherche $\max_{U \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})} \mathrm{Tr}(AUBU^{-1})$.
2. Montrer que le maximum est bien atteint en $U_0 \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.
3. En considérant l'application $U : t \longmapsto \exp(tH)U_0$ pour toute matrice H antisymétrique réelle.
4. En déduire que $\mathrm{Tr}(AB) \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

Exercice 5: ★★★ *b.14.19*

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. On pose $[A, B] = AB - BA$ et on suppose que $[A, B]$ commute avec A et B.

1. Montrer que $[A, B]e^A = e^A[A, B]$.
2. Montrer que $e^{tA}Be^{-tA} = B + t[A, B]$ pour tout réel t.
3. Montrer que $\exp(A)\exp(B) = \exp A + B + \frac{1}{2}[A, B]$.
4. On pose $V = \mathrm{Vect}(A, B, [A, B])$. Montrer que si $[A, B] \neq 0$, V est de dimension 3.
5. Montrer que $\left\{e^M, M \in V\right\}$ est stable par multiplication.

II) Équations différentielles

A) Résolution explicite d'équations différentielles

Exercice 6: ★ *b.16.1*

Résoudre les systèmes différentiels linéaires :

1. $\begin{cases} x' &= x + 2y - z \\ y' &= 2x +' y - 2z \\ z' &= -x - 2y + z \end{cases}$

2. $\begin{cases} y' = y + z + \sin t \\ z' = -y + 3z \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = -2x + 2y + z \end{cases}$

5. $\begin{cases} y' + y = z \\ z' + 2z = y - 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z \end{cases}$

Exercice 7: ★ *b.16.3*

Résoudre sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ puis sur $[0\,,\pi]$: $\cos(x)y'(x) - \sin(x)y - \cos^3(x) = 0$.

Exercice 8: ★★ *b.16.6*

Intégrer l'équation différentielle $2xy' + y = \dfrac{1}{1-x}$.

Exercice 9: ★★ *b.16.9*

1. Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f''(x) + f(-x) = \cos(x)$.
2. Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(-x) = x + \cos(x)$.
3. Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(-x) = e^x$.

Exercice 10: ★★ *b.16.10*

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$, u une application de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$, soit $L_u(f) = f' + uf$.

1. Montrer que L_u est linéaire. Calculer $L_u \circ L_u$.
2. Résoudre $y'' + 2xy' + (1 + x^2)y = 0$.

Exercice 11: ★★ *b.16.12*

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, par la méthode de variation des deux constantes, $y'' + y = \dfrac{1}{x}$ (on pourra utiliser $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$).

2. En déduire une expression de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, pour $x > 0$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

B) Séries entières et EDL

Exercice 12: ★ *b.16.15*

1. Solutions développables en série entière de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.
2. Calculer les sommes des séries trouvées.
3. Décrire un moyen permettant d'obtenir les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$, $]0\,,1[$ et $]1\,,+\infty[$.

Exercice 13: ★★ *b.16.18*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la dimension de l'espace des solutions de l'équation différentielle $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ développables en série entière au voisinage de 0.

C) Etude qualitative de solutions d'EDL d'ordre 1 et 2

Ordre 1 :

Exercice 14: ★★★ *b.16.37*

Soient $a > 0$ et f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f^2$ converge. Montrer que l'équation différentielle $y' - ay = f$ admet une unique solution de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ordre 2 :

Exercice 15: ★★ *b.16.22*

Pour f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, monotone et de limite finie en $+\infty$, montrer que les solutions de $y'' + y = f$ sont bornées.

Exercice 16: ★★ *b.16.23*

1. Résoudre $y'' + 4y = 0$.
2. Montrer que $h(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x g(t)\sin(2x - 2t)\,\mathrm{d}t$, où g est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est

solution de $y'' + 4y = g(t)$ puis résoudre cette équation différentielle.

3. Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f'' + 4f \geqslant 0$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \geqslant 0$.

Exercice 17: ★★ *b.16.24*

1. Résoudre $y'' - y = \dfrac{2}{ch^3(x)}$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) - f(x) \geqslant \dfrac{2}{ch^3(x)}$ et $f(0) = f'(0) = 0$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant \dfrac{sh^2(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

Exercice 18: ★★ *b.16.26*

1. Soit $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$; montrer qu'une solution non-nulle de $y'' - qy = 0$ a au plus un zéro dans $\mathbb{R}_+$.
2. Soit y l'unique solution maximale vérifiant $y(0) = y'(0) = 1$; montrer que $y(t) \geqslant 1 + t$ pour tout $t \geqslant 0$.
3. Montrer que $g(t) = y(t) \displaystyle\int_t^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{y^2(u)}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et solution de l'équation différentielle. Montrer que g est bornée.
4. Qu'en déduire pour h si h est une solution bornée de l'équation ?

Exercice 19: ★★ *b.16.27*

Soient $q \in \mathcal{C}^0([a\,, +\infty[\,, \mathbb{R}_+)$ et (E) l'équation différentielle $y'' = q(x)y$.

1. Soit f une solution de (E) telle que $f(a) > 0$ et $f'(a) > 0$. Montrer que f et f' sont strictement positives et que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
2. Soient u et v les solutions de (E) telles que $u(a) = 1$, $u'(a) = 0$ et $v(a) = 0$, $v'(a) = 1$.

   Calculer $u'v - uv'$. Montrer que, sur $]a\,, +\infty[$, $\dfrac{u}{v}$ et $\dfrac{u'}{v'}$ sont monotones de monotonies contraires. Montrer que $\dfrac{u}{v}$ et $\dfrac{u'}{v'}$ tendent en $+\infty$ vers la même limite réelle.
3. Montrer qu'il existe une unique solution g de (E), strictement positive, telle que $g(a) = 1$ et telle que g décroisse sur $[a\,, +\infty[$.

Exercice 20: ★★ *b.16.30*

Soient a et b deux fonctions continues et 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, E l'espace des solutions de $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$. Montrer qu'il exsite $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $y \in E \backslash \{0\}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}, y(t+1) = \lambda y(t)$.

Exercice 21: ★★ *b.16.33*

On considère $q \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}_-)$ et $(x_1, x_2) \in I^2$ (deux points distincts). Soit l'équation $(S) : \begin{cases} y'' + qy = 0 \\ y(x_1) = a \text{ et } y(x_2) = b \end{cases}$.

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{S}_{x_2} = \{y \in \mathcal{S}, y(x_2) = 0\}$? Montrer que si $b = 0$, alors pour tout a, (S) a une unique solution.
2. Montrer que cette unique solution est monotone.
3. Montrer l'existence et l'unicité de la solution pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 22: ★★★ *b.16.32*

Soit $q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On suppose que q' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $q(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$. Montrer que les solutions de $y'' + (q+1)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

D) Etude qualitative de solutions d'EDL de tout ordre

Exercice 23: ★★ *b.16.45*

On pose, pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $[A, B] = AB - BA$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe une application continue B de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A'(t) = [A(t), B(t)]$. Montrer que le polynôme caractéristique de $A(t)$ est indépendant de t.

Exercice 24: ★★★ *b.16.39*

1. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Im}(a) < 0$, et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) - af(x) = \ell$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\dfrac{\ell}{a}$.
2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Que peut-on dire des limites de f' et de f'' ?
3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f''(x) + bf'(x) + cf(x) = \ell$, avec $P = X^2 + bX + c$ qui est scindé à racines complexes de parties réelles

strictement négatives. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\ell}{c}$. Que peut-on dire des limites de f' et f'' ?

4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{(k)}(x) = \ell$, avec $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ polynôme scindé à racines complexes de parties réelles strictement négatives. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\ell}{a_0}$. Que peut-on dire des limites de $f^{(k)}$?

Exercice 25: ★★★ *b.16.49*

Soient $p : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue et $s_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $s \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ telle que $s(0) = s_0$ et $\forall t \in \mathbb{R}, s'(t) = p(t)s(t) - s(t)p(t)$.
   On suppose que s_0 est symétrique et que $p(t)$ est antisymétrique pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $s(t)$ est symétrique pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}, s(t) = u(t)s_0u(t)^\top$.
4. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}, s(t) = u(t)s_0u(t)^\top$.

Exercice 26: ★★★ *b.16.50*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $T \in \mathbb{R}_+^*$. On note A_T l'ensemble des $v \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels il existe $u \in \mathcal{C}^0([0\,,T]\,,\mathbb{R}^p)$ telle que la solution X du problème de Cauchy $(X'(t) = AX(t) + Bu(t); X(0) = 0)$ vérifie $X(T) = v$. Montrer que $A_T = \mathbb{R}^n$ *si et seulement si* la matrice blocs $\begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$ est de rang n.

Exercice 27: ★★★ *b.16.52*

Soient E l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $a \in \mathbb{R}$ et f dans E, soit f_a l'élément de E donné par $\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) = f(x-a)$. Déterminer les $f \in E$ tels que $\mathrm{Vect}\,\{f_a, a \in \mathbb{R}\}$ soit de dimension finie.

III) Calcul différentiel

A) Etude de la régularité

Exercice 28: ★ *b.17.1*

Etudier les limites éventuelles en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$
2. $f(x,y) = \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = x^y$
4. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Exercice 29: ★ *b.17.5*

On pose $f(x,y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+x^{2n}+y^{2n})$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

Exercice 30: ★ *b.17.8*

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On considère $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases} \end{cases}$.

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $J_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^p t^q \,\mathrm{d}t$. En déduire la valeur des dérivées partielles de g sur la diagonale.
3. On suppose ici $f = \sin$. Tracer l'ensemble d'équations $g(x,y) = 0$. Déterminer les extrema de g.

Exercice 31: ★★ *b*

Soit $E = \mathbb{R}^n$. En quels points les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles différentiables ?

B) Etudes d'extrema

Exercice 32: ★★ *b.17.15*

Soient E un espace euclidien, a et b deux vecteurs non-nuls de E. Pour $x \in E \setminus \{0\}$, soit $f(x) = \dfrac{\langle x \mid a \rangle \langle x \mid b \rangle}{\|x\|^2}$. Déterminer les bornes supérieure et inférieure de f.

Exercice 33: ★★ *b.17.17*

On considère n expériences indépendantes ayant les probabilités de réussite respectives $p_1, \ldots, p_n$. On note N le nombre d'expériences ayant réussi.

1. Déterminer $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{V}(N)$.
2. On fixe $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n > m$. Quel est le maximum de $\mathbb{V}(N)$ sous la contrainte $\mathbb{E}(X) = m$?

Exercice 34: ★★★ *b.17.16*

On munit $\mathbb{R}^m$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^m$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et on pose

$$\phi \,:\, M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \|x_i - Mx_i\|^2$$

Montrer que la restriction de ϕ à $\mathcal{A}$ admet un minimum et le calculer à l'aide de la matrice $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i x_i^\top$.

Indication. Montrer que $\phi(xy^\top) \geqslant \phi(xx^\top)$ pour tout vecteur unitaire $x \in \mathbb{R}^m$ et tout $y \in \mathbb{R}^m$.

Exercice 35: ★★★ *b.17.20*

Principe de maximalité de Hopf.

Soient B (resp. S) la boule unité ouverte (resp. la sphère unité) de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne canonique, f une fonction continue de $\overline{B}$ dans $\mathbb{R}$, de restriction à B de classe $\mathcal{C}^2$, $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des fonctions continues de B dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in B$, la matrice $(a_{i,j}(x))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ appartienne à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

On suppose enfin que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ est indentiquement nulle sur B.

Montrer que f atteint son maximum sur S.

C) Equations aux dérivées partielles

Exercice 36: ★★ *b.17.22*

En effectuant un changement de variables, trouver les fonctions f vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 y^3$$

Exercice 37: ★★ *b.17.27*

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On définit $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (f(x,y), 2xy) \end{cases}$. Déterminer f pour que la matrice jacobienne de ϕ soit une matrice de similitude directe.

D) Fonctions convexes ou avec d'autres propriétés de régularité

Exercice 38: ★★ *b.17.30*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que f est une application affine *si et seulement si* sa différentielle est constante.
2. On suppose que $\mathrm{d}f$ est constante et que f d'annule en tout point de la frontière d'un ouvert borné non-vide. Montrer que f est nulle.
3. Montrer le lemme : si X est un ensemble, et $\phi : X \to \mathbb{R}$ vérifie $\forall (x,y,z) \in X^3, \phi(x,y,z) = \phi(y,x,z) = -\phi(z,y,x)$, alors $\phi = 0$.
4. Montrer l'équivalence entre :
   — il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et $b \in \mathbb{R}^n$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$;
   — pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne de f en x est antisymétrique.

   On considèrera, pour $1 \leqslant i,j,k \leqslant n$, $f_{i,j,k} = \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}$.
5. On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que f est une isométrie de E pour la distance euclidienne *si et seulement si* pour tout $x \in E$, $\mathrm{d}f(x)$ est une application orthogonale.

Exercice 39: ★★ *b.17.33*

On considère une fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle qu'il existe $c > 0$ et telle que pour tout $(a, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\langle \mathrm{d}g(a) \cdot h \mid h \rangle \geqslant c \|h\|^2$.

1. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\langle g(b) - g(a) \mid b - a \rangle \geqslant c \|b - a\|^2$.
2. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$.

Exercice 40: ★★ *b.17.37*

Soient f une application $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que si f est convexe alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x) \mid y - x \rangle \geqslant 0$.
2. On suppose que f est convexe et que l'application ∇f est L-lipschitzienne. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(y) - \nabla f(x) \mid y - x \rangle \geqslant \frac{1}{L} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2$$

3. Montrer la réciproque.

Exercice 41: ★★★ *b.17.36*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est convexe *si et seulement si* , pour tout couple (u, v) d'éléments de $\mathbb{R}^n$, la fonction $t \longmapsto f(u + tv)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose que f est convexe. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que toutes les dérivées partielles $\partial_i f(x)$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$ existent. Montrer que f est différentiable en x.

Exercice 42: ★★★ *b.17.38*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{d}f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ est injective et que $\dfrac{f(x)}{\|x\|} \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$. Montrer que f est strictement convexe et que $\mathrm{d}f$ réalise un homémorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

E) Fonctions harmoniques et holomorphes

Exercice 43: ★★ *b.17.42*

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\Delta f = 0$. Soit $g\ :\ (r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1. Montrer que $r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial g}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = 0$.
2. Soit $\phi\ :\ r \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que $(r\phi')' = 0$.
3. Montrer que ϕ est constante.

Exercice 44: ★★ *b.17.46*

Soit f une fonction sur Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{C}$. On pose u et v des fonctions à valeurs réelles telles que pour tout $z \in \Omega$, $z = x + \mathrm{i}y$, $f(z) = \tilde{f}(x,y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$. On suppose u et v de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Montrer que si u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann, *id est*
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
alors $\Delta u = \Delta v = 0$.
2. On suppose que $f_{|\mathbb{D}(0,R)}$ est somme d'une série entière ; calculer pour tout $z \in \mathbb{D}(0,R)$, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(z)$ et en déduire que les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées.
Soient Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{C}$, f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$. On dit que f est holomorphe au point z_0 de Ω si $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ tend vers une limite finie quand z tend vers z_0.
3. Montrer que le fait que f vérfie les conditions de Cauchy-Riemann est équivalent à l'holomorphie de f.
4. On suppose que $\Omega = \mathbb{D}(0,R)$, que $f_{|\mathbb{D}(0,R)}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que pour tout $z \in \mathbb{D}(0,R)$, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(z) = 0$; montrer que $f_{|\mathbb{D}(0,R)}$ est somme d'une série entière.

F) Espaces tangents

Exercice 45: ★★ *b*

Soit $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Notons :

- $\triangleleft$ $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in I\}$ le graphe de f ;
- $\triangleleft$ $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$;
- $\triangleleft$ $\mathcal{T}_{x_0}$ l'espace tangent à Γ en $(x_0, f(x_0))$.

Montrer que

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \mathcal{T}_{x_0}$$

Exercice 46: ★★★ *b.17.48*

1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $a \in U$. Déterminer les vecteurs tangents à U en a.
2. Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'en tout point $a \in X$, tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est tangent à X en a. Est-ce-que X est nécessairement un ouvert de $\mathbb{R}^n$?